Klausur zur MATHEMATIK 2 für Studierende der Wirtschaftswissenschaften
am Donnerstag, dem 26. Juli 2012, 09:00–11:00 Uhr
Korrigierte Version

Aufgabe 1 (2 + 6 + 5 + 5 + 3 + 4 Punkte) Gegeben sei die Funktion dreier Veränderlicher

$$f(x, y, z) = x \cdot e^{2y-x} - xz + y.$$

a) Geben Sie die Definitionsmenge von f an. Ist f homogen?

b) Bestimmen Sie die Richtung des steilsten An- und Abstiegs an der Stelle $\vec{a} = (2,\ 1,\ -1)$. Geben Sie normierte Vektoren an.

c) Bestimmen Sie die Tangentialhyperebene von f im Punkt $(\vec{a},\ f(\vec{a}))$. Für welches $r \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt $(x, y, z, u) = (r,\ 1,\ 1,\ 1)$ in der Ebene?

d) Berechnen Sie näherungsweise mit Hilfe des vollständigen Differentials die relative prozentuale Änderung von $f(\vec{a})$, wenn $\vec{a}$ geändert wird zu $\vec{a}^* = (2.2,\ 0.9,\ -1.1)$.

e) Untersuchen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, ob eine Auflösung der Gleichung $f(x, y, z) = 5$ nach x im Punkt $\vec{a}$ existiert, d.h. ob es eine Funktion $x = g(y, z)$ gibt mit $2 = g(1, -1)$ und $f(g(y, z), y, z) = 5$ für alle (y, z) in einer Umgebung von $(1,\ -1)$.

f) gestrichen

Aufgabe 2 (6 + 7 + 12 Punkte)

a) Berechnen Sie ausführlich - unter Angabe aller Rechenschritte - das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{1-3\sqrt{x}}\, dx.$$

b) Für ein Lager sei eine mit der Zeit t anwachsende Bedarfsrate $r(t) = 3t^2 \ln(t)$ wirksam. Dadurch ist die gesamte Lagerentnahme E von der Zeit $t = 1$ bis zur Zeit $t = x$ gegeben durch $E(x) = \int_1^x r(t)\, dt$. Wie groß ist der Bestand zum Zeitpunkt $x = 10$, wenn der Bestand zum Zeitpunkt $x = 1$ genau 2000 Stück beträgt?
Hinweis: Berechnen Sie das Integral ausführlich unter Angabe aller Rechenschritte mittels partieller Integration.

c) Berechnen Sie den einzigen stationären Punkt der Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 - 16x + y^4 - 32y + 3z^2 - 2xz + 4.$$

Handelt es sich hier um ein relatives Maximum oder um ein relatives Minimum? Berechnen Sie ausführlich die Determinanten.

Aufgabe 3 (17 + 8 Punkte)

a) Die Funktion

$$f(x, y, z) = x^3 \cdot y^2 \cdot z$$

besitzt unter der Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = x + y + z - 6 = 0$$

ein Extremum für $\lambda = 108$ und $x = 3$ (bei Verwendung des Lagrange-Verfahrens mit $L = \ldots - \lambda \ldots$). Berechnen Sie hierzu den y- und z-Wert und geben Sie die zugehörige Hesse-Matrix an. Von welcher Art ist das Extremum und wie lautet der Extremwert?
Hinweise: Stellen Sie zunächst alle notwendigen Bedingungen auf, bevor Sie λ und x einsetzen. Sie dürfen benutzen, dass die Determinante der Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion in dem Punkt den Wert -11664 hat. Berechnen Sie aber die weiteren benötigten Determinanten ausführlich.

b) Berechnen Sie näherungsweise mit dem Umhüllendensatz, um welchen Wert sich das Extremum aus Teil a) ändert, wenn statt g die Funktion $\tilde{g}(x, y, z) = x + y + 0.9z - 6$ und statt f die Funktion $\tilde{f}(x, y, z) = 1.1x^3(y + 0.1)^2 z$ betrachtet wird.

Bitte beachten Sie die zweite Seite!

Aufgabe 4 (25 Punkte) Lösen Sie mit Hilfe des Satzes von Karush, Kuhn und Tucker aus der aktuellen Vorlesung/Zentralübung das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= e^{-(x+2)^2+(y-1)^2+z^2+z+6} \to \min! \\ g(x,y,z) &= 3x^2+z \leq 3 \\ x,y,z &\geq 0 \end{aligned}$$

und bestimmen Sie den Wert des Minimums. Überprüfen Sie die LICQ. Begründen Sie jeden Ihrer Schritte und berechnen Sie alle Lagrange-Multiplikatoren.